

# Algoritmi de optimizare 1-dimensională

(line search, linear programming)

Formulare matematică:

- Variabila de stare:  $x \in \mathbb{R}$
- Funcție obiectiv  $f(x)$

**OBS:** funcția unidimensională  $f(x)$  se poate obține ca o **proiecție** a unei funcții multi-dimensionale într-un plan de căutare

**!! Alg cautării simultane** (cautării uniforme, cu pas const + cu pas variabil)

- descriere la tablă; discuție complexitate de calcul

Clasificare:

- Metode de sectionare
- Metode de aproximare polinomială

## Metode de sectionare

**Formulare matematică:**

- O singură variabilă de stare:  $x$
- Funcție obiectiv  $f(x)$  **unimodală (!!!)**
- Domeniul de căutare **cunoscut**  $[a, b]$     *Obs.: constrângeri ?!*

**Metoda:**

- Impartirea (sectionarea) intervalului în subintervale
- Eliminarea unui subinterval pe anumite criterii
- Continuarea prelucrării pe subinterval până când se îndeplinește o condiție de stop.

## Metode de sectionare

**Rezultatul** este un interval (numit *interval de incredere*) in care se afla cu siguranta valoarea de optim  $x^*$

### Tema:

- daca se doreste o valoare, cum se calculeaza si de ce?
- ce se intampla daca functia nu este unimodala?

**OBS:** metoda de tip “Divide et impera” (*Atentie la implementare!!*)

## Metode de sectionare. Clasificare

- **Derivative**

foloseste derivatele pentru criteriul de eliminare a subintervalului, **necesara o singura taietura** (pct de sectionare)

- **Nederivative**

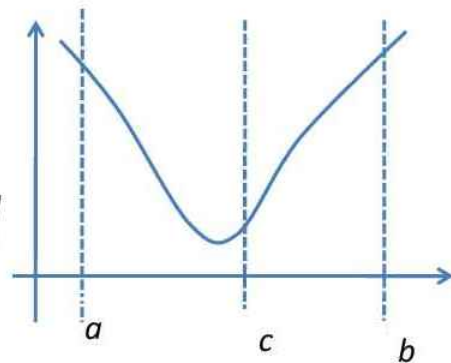
- nu foloseste derivatele pentru criteriul de eliminare a subintervalului, **necesare 2 taieturi**
- Se poate folosi si pentru functii obiectiv continue si **NEDERIVABILE**

## Metode de sectionare derivative

- $f(x)$ , caut  $x^*$  a.i.  $f(x^*) < f(x)$ , pt orice  $x$  din  $[a, b]$
- Este cunoscuta sau se estimeaza (met dif. finite)  
 $g(x) = f'(x)$

*Obs: estimarea inseamna 2 evaluari de functie*

- Pt ca functia este unimodala  
 $g(a) < 0$  si  $g(b) > 0$
- Sectionam in  $c$ 
  - Daca  $g(c) < 0$ , continuam  $[c, b]$
  - Daca  $g(c) > 0$ , continuam  $[a, c]$
- Noul interval se renoteaza  $[a, b]$
- Reluam algoritmul pana la cond de stop



## Metode de sectionare derivative

- **Metoda bisectiei (Bolzano search)**

Sectionarea se face in  $c = (a + b) / 2$

### Tema:

- de ce se alege val.  $c$  astfel?
- sa se calculeze dimensiunea intervalului de incredere dupa  $N$  sectionari
- Fiind data o functie obiectiv  $f(x)$  si intervalul de incredere  $[a, b]$  sa se calculeze nr de sectionari necesare pentru ca val de optimi sa se estimeze cu o eroare maxima  $E$



## Metode de sectionare derivative

- **Metoda sectionare intr-un pct cu alegerea unei taieturi aleatoare**

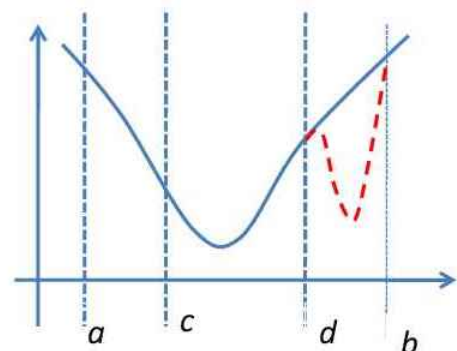
Sectionarea se face in  $c \rightarrow N, U[a, b]$

### Tema:

- Compartie fata de metoda bisectiei?
- Discutie dupa tipul distributiei  $U$  sau  $N$

## Metode de sectionare nederivative

- $f(x)$ , caut  $x^*$  ai  $f(x^*) < f(x)$ , pt orice  $x$  din  $[a, b]$
- **NU** se cunoaste si nu se estimeaza derivata  $g(x)=f'(x)$ , se vor folosi **2 taieturi** (*Comparatie cu metodele derivative d.p.v. computational*)
- Eliminarea subintervalului se face pe baza val. fct. si a prop. ca functia este unimodala
- Sectionam in  $c$  si  $d$ . **Prin conventie, cele 2 taieturi se aleg simetrice fata de capetele intervalului**
  - Daca  $f(c) < f(d)$ , continuam  $[a, d]$
  - Daca  $f(c) > f(d)$ , continuam  $[c, b]$
- *Noul interval se renoteaza  $[a, b]$*
- *Reluam algoritmul pana la cond de stop*



## Metode de sectionare nederivative

- **Metoda dihotomiei**

- Se doreste a fi o metoda optimala: se aleg cele 2 taieturi astfel incat dupa N sectionari intervalul de incredere sa fie minim
- Punand aceasta conditie rezulta ca taietura  $c$  se suprapune peste  $d$  (**TEMA: dem. acest lucru**). Metoda fiind nederivativa nu putem lucra numai cu o taietura motiv pentru care se face o mica deplasare (eps) a taieturilor fata de pozitia de mijloc:

$$c = (a+b)/2 - \text{eps} \quad d = (a+b)/2 + \text{eps}$$

- OBS: (a) practic se redescopera metoda bisectiei in care derivata din pct din mijloc este estimata prin dif. finite
- (b) Desi se porneste de la dezvoltarea unui alg. optimal, in final rezulta un algoritm suboptimal.

**Tema: Idem ca la bisectie**

## Metode de sectionare nederivative

- **Metoda sectiunii de aur**

- Taieturile se aleg in raport cu nr de aur
- $$\tau = (1 + \sqrt{5}) / 2 = 1.618...$$

astfel:

$$c = b - (b - a) / \tau \quad d = a + (b - a) / \tau$$

- OBS: desi este o metoda de sectionare nederivativa care necesita 2 taieturi la fiecare etapa de sectionare, se poate demonstra foarte usor (**TEMA**) ca taietura ramasa de la sectionarea anterioara se pastreaza la sectionarea curenta, ceea ce face ca algoritmul sa necesite volum de calcul mai mic (**TEMA: sa se determine complexitatea de calcul necesar pentru N sectionari SAU pentru a obtine o anumita eroare de aproximare a optimului**)

**Tema: Idem ca la bisectie**

[Aplicatie practica](#)

## Metode de sectionare nederivative

- **Metoda Fibonacci**

- Se def. sirul lui Fibonacci:

$$F(0)=1, F(1)=1, F(n)=F(n-1)+F(n-2)$$

- Intervalul initial (de incertitudine):  $L(0)=b-a$

- **Se cunoaste de la inceput nr de etape de sectionare n**

- La fiecare etapa de sectionare  $i$ , taieturile se fac simetric fata de capetele intervalului cu valoarea:

$$L(i)=F(n-i)/F(n)*L(0)$$

adica pentru intervalul curent  $[a,b]$

$$c = b - L(i) \quad d = a + L(i)$$

- Eliminarea subintervalului se face conform metodologiei generale

## Metode de sectionare nederivative

- **Metoda Fibonacci**

OBS:  $L(1)=F(n-1)/F(n)*L(0)$

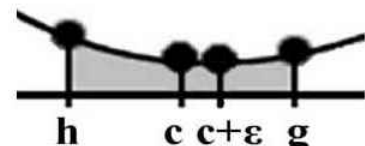
$$L(2)=F(n-2)/F(n)*L(0)=$$

$$=F(n-2)/F(n-1)*F(n-1)/F(n)*L(0)=$$

$$=F(n-2)/F(n-1)*L(1)=F(n'-1)/F(n')*L'(0)$$

Intervalul se poate calcula relativ la intervalul anterior pentru cazul in care **nr de etape de sectionare descreste cu 1** ( $n'=n-1$   $L'(0)=L(1)$  )

OBS: Ultima sectionare se face in raport de  $\frac{1}{2}$ , nu se poate face (taieturile coincid), se deplaseaza una dintre ele cu epsilon mic



OBS: Taietura din sectionarea anterioara se pastreaza in sectionarea curenta. (TEMA: dem)

TEMA: complexitate de calcul pentru n sectionari

Tema: Idem ca la bisectie

Aplicatie practica



## Metode de sectionare nederivative

- **Metoda Fibonacci. Criteriul mini-max:**

Daca se presupun toate tehnicile de sectionare nederivativa, in  $n$  pct de sectionare  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , pentru o fct obiectiv  $f$ , notam lungimea intervalului de incredere obtinut:

$$L(n) = L(f, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Def. val. max. a acestui interval, in raport cu orice fct:

$$L_{\max}(n) = \max L(f, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Folosind tehnica Fibonacci se obtine cel mai mic interval de incredere:

$$L_{\text{fib}}(n) = \min L_{\max}(n) = \min \max L(f, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

## Metode de sectionare nederivative

- **Lattice search**

- Se bazeaza pe sirul lui Fibonacci modificat:

$$K(0)=0, K(1)=1, K(n+2) = K(n+1) + K(n) + 1$$

- Imbunatatirea provine din inlaturarea capatului de interval dupa sectionare; astfel daca intervalul curent este  $[a, b]$  si taieturile sunt  $c$  si  $d$ , iar  $f(c) > f(d)$ , noul interval este  $(c, b]$  eliminand  $c$  din intervalul de cautat

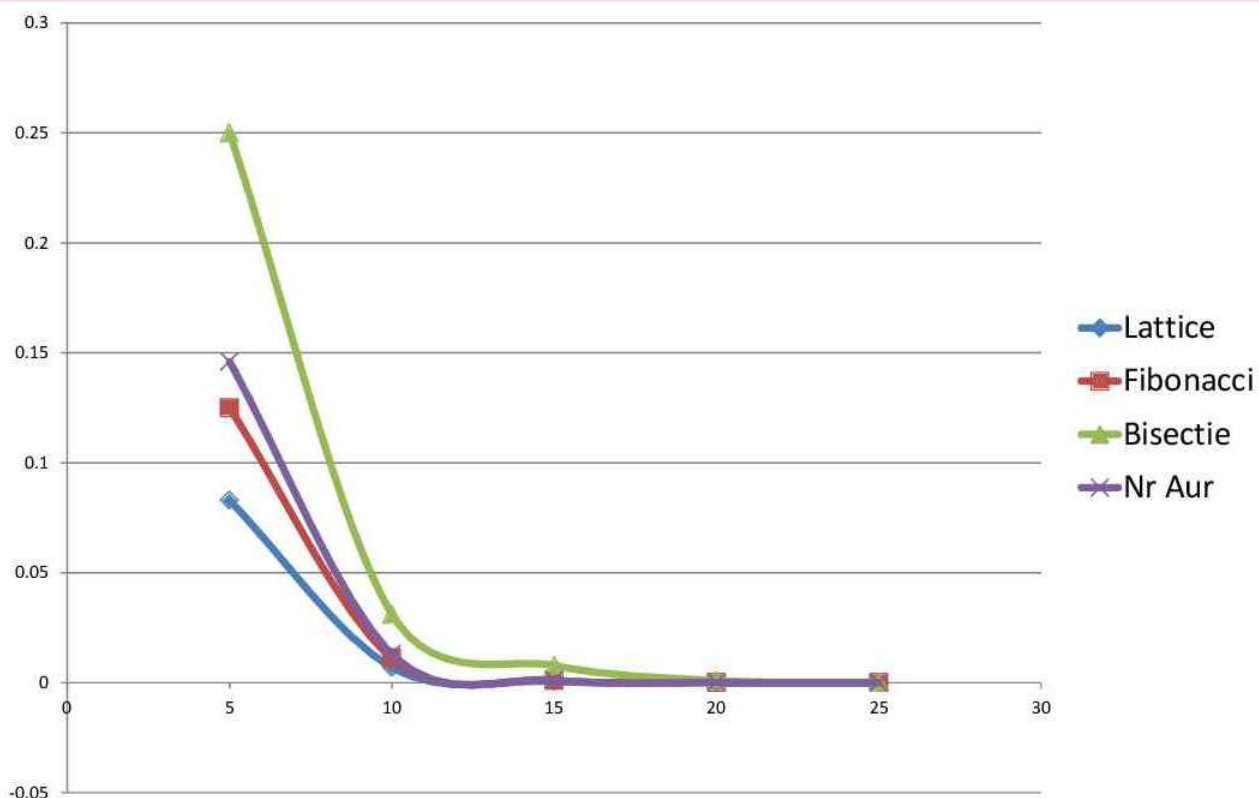
TEMA: comparatie intre metoda sectiunii de aur si Fibonacci (respectiv latice). Ce insemnatare are faptul ca

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (F(n) / F(n-1)) = \tau \text{ (nr aur)}$$

## Metode de sectionare. Comparatie performante

Nr Evaluari N	Lattice $1/K(N)$	Fibonacci $1/F(N)$	Dichotomie $\approx 1/2^{\lfloor N/2 \rfloor}$	Sect. Aur $1/(1.618)^{(N-1)}$
5	.083	.125	.25	.146
10	.007	.0112	.0312	.0131
15	.000627	.00101	.00781	.00118
20	5.65E-05	9.14E-05	9.76E-04	10.7E-05
25	5.09E-06	8.24E-06	2.44E-04	9.6E-06

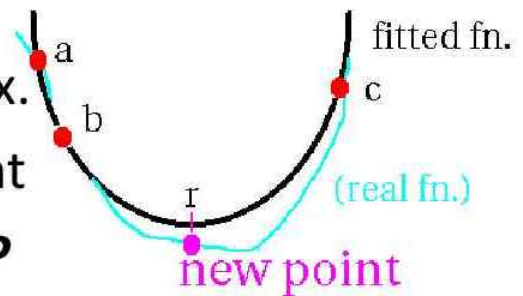
## Metode de sectionare. Comparatie performante





## Metode interpolative. Structura generala

- Se determina (printr-o cautare grosiere) un interval  $[a,c]$  in care se gaseste optimul.
- Pe intervalul gasit se realizeaza o aproximare a functiei obiectiv cu o functie polinomiala (relativ la metoda)
- Se determina minimul fct. aprox.
- **Daca** optimul gasit este suficient de bun relativ la un criteriu, **STOP**
- **Altfel**, cu ajutorul pct. de optim curent se restrange intervalul si se reia procesul (*aproximare succesiva*)

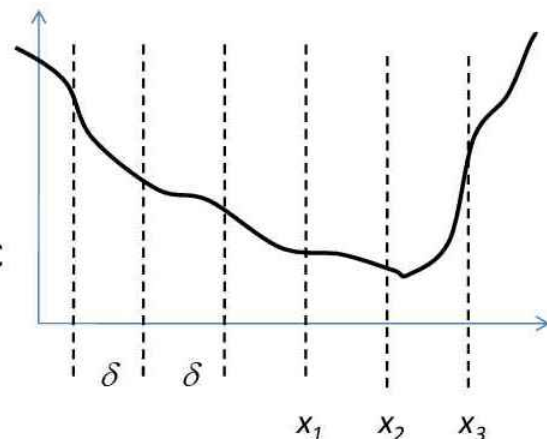


## Metode interpolative **nederivative**

- **Interpolare patratica**

– Cautare grosiera cu un interval  $\delta$  pana cand se gasesc trei valori succesive  $x_1 < x_2 < x_3$  pt. care:

$$f(x_1) > f(x_2) \text{ si } f(x_2) < f(x_3)$$

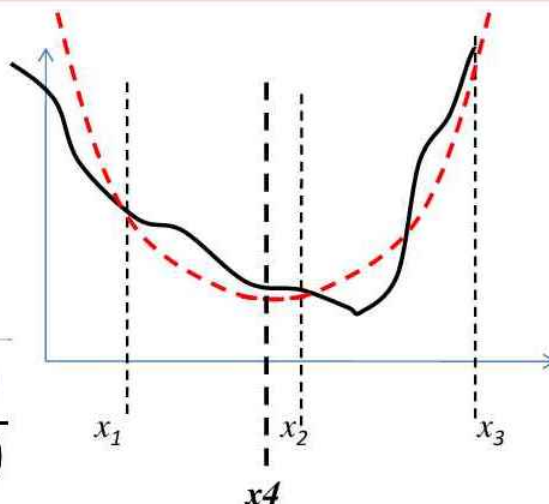


*Obs:* daca intervalul gasit este prea mare, cautarea grosiera poate fi rafinata, cautand similar cu un  $\delta$  mai mic pe intervalul  $[x_1, x_3]$

## Metode interpolative nederivative

- **Interpolare patratica**

Cu cele 3 puncte se face o aproximare folosind un polinom Lagrange de gradul II



$$f(x) \approx q(x) = \sum_{i=1}^3 f(x_i) \frac{\prod_{j \neq i} (x - x_j)}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}$$

Optimul acestei fct. de aprox. este in: **TEMA: dem.**

$$x_4 = \frac{1}{2} \frac{\beta_{23}f(x_1) + \beta_{31}f(x_2) + \beta_{12}f(x_3)}{\gamma_{23}f(x_1) + \gamma_{31}f(x_2) + \gamma_{12}f(x_3)}$$

unde:  $\gamma_{ij} = x_i - x_j$        $\beta_{ij} = x_i^2 - x_j^2$

## Metode interpolative nederivative

- **Interpolare patratica** (continuare)

**Daca**  $x_4$  respecta cond. de optim **atunci STOP**

**Altfel** continua astfel:

Evident  $x_4 \in [x_1, x_3]$  (Dem !) insa exista 2 situatii:

1.  $x_4 \in [x_1, x_2]$  (TEMA)

2.  $x_4 \in [x_2, x_3]$  pentru care exista 2 posibilitati:

2a.  $f(x_4) \leq f(x_2)$ , atunci continua cu aprox. pt  $(x_2, x_4, x_3)$

2b.  $f(x_2) < f(x_4) \leq f(x_3)$ , atunci continua cu aprox. pt  $(x_1, x_2, x_4)$

**Ordinul de convergenta** al metodei de interpolare patratica este  $\lambda = 1.3...$ , cea mai mare radacina a ecuatiei:

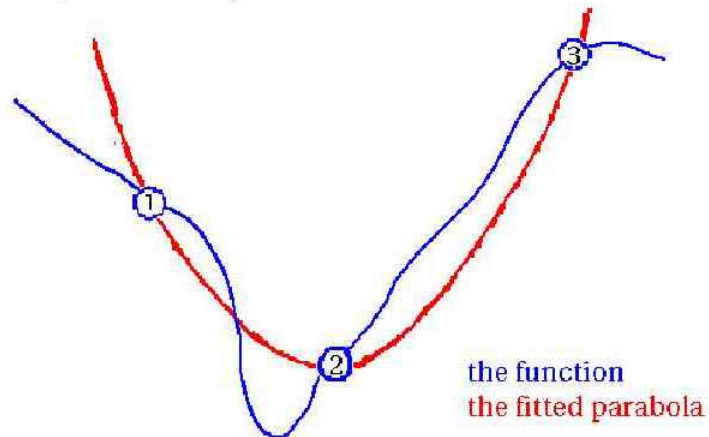
$$\lambda^3 - \lambda - 1 = 0.$$

## Metode interpolative nederivative

- Interpolare patratica (continua)

**Problema :**

$$x_4 \equiv x_2$$



**Tema:** Cum se poate iesi din aceasta situatie?

## Metode interpolative **derivative**

- Interpolare cubica

- Se utilizeaza derivata functiei

$$f'(x)$$

- Cautare grosiera cu un interval  $\delta$  pana cand se gasesc doua valori succesive  $a, b$  pt. care:

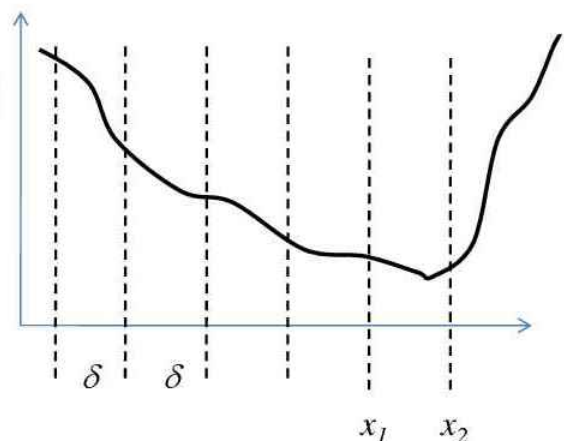
$$f'(x_1) < 0, \quad f'(x_2) \geq 0$$

- In cele doua puncte sunt cunoscute valorile functiei:

$$f(x_1), \quad f(x_2)$$

Si derivatele

$$f'(x_1), \quad f'(x_2)$$





## Metode interpolative derivative

- **Interpolare cubica** (continua)

In cele doua puncte sunt cunoscute

valorile functiei:  $f(x_1), f(x_2)$

si derivatele:  $f'(x_1), f'(x_2)$

Cu care se contruieste un polinom de aprox. de grad III (TEMA)

$$f(x) \approx P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

Pentru care optimul este dat de conditiile:

$$P'(x) = a_1 + 2 a_2 x + 3 a_3 x^2 = 0$$

$$P''(x) = 2 a_2 + 6 a_3 x > 0$$

## Metode interpolative derivative

- **Interpolare cubica** (continua)

Solutia de optim este:

$$x_3 = x_2 - (x_2 - x_1) \frac{f'(x_2) + \beta_2 - \beta_1}{f'(x_2) - f'(x_1) + 2\beta_2}$$

unde:

$$\beta_1 = f'(x_1) + f'(x_2) - 3 \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

$$\beta_2 = (\beta_1^2 - f'(x_1)f'(x_2))^{1/2}.$$

**Daca**  $x_3$  respecta cond de optim, **atunci STOP**

**Altfel** continua pe unul dintre subintervale in functie de semnul lui  $f'(x_3)$  (TEMA)

## Metode interpolative derivative

- **Interpolare cubica** (continua)

**Ordinul de convergenta** al metodei de interpolare cubica este  
 $\lambda = 2$

## Metode interpolative derivative

- **Interpolare patratica**

Similara metodei cubice, insa se aproximeaza cu polinom de gradul II (TEMA)

$$f(x) \approx P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

Solutia:

$$x_3 = x_1 - f'(x_1) / 2 \alpha$$

unde:

$$\alpha = (f(x_2) - f(x_1)) / (x_2 - x_1)^2 - f'(x_1) / (x_2 - x_1)^2$$

## Metode interpolative derivative, fol. derivata II-a

- **Metoda Newton**

Se pp. ca functia obiectiv  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in \mathcal{C}^2$   
deci **primele doua derivate** pot fi masurate (evaluate) in  
fiecare punct curent din domeniul de definitie

Se aprox. functia obiectiv cu un polinom de grad II, rezultat  
dintr-o aproximare in serie Taylor in jurul punctului curent  $x_k$ :

$$q(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \frac{1}{2}f''(x_k)(x - x_k)^2$$

## Metode interpolative derivative, fol. derivata II-a

- **Metoda Newton** (continuation)

Solutia este:

$$q'(x_{k+1}) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$$

OBS.: 1. Solutia se bazeaza pe informatiile dintr-un singur pct.  
2. Procesul de cautare nu depinde de valoarea  $f(x_k)$   
3. Metoda poate fi interpretata si ca o metoda de  
rezolvare iterativa a ecuatiilor  $f'(x) = 0$ .

4. Metoda Newton are **rata de convergenta patratica**



## Metode interpolative derivative, fol. derivata II-a

- **Metoda Quasi-Newton**

In solutia Newton se folosesc aproximariile derivatelor prin metoda diferentelor finite:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i + \Delta) - f(x_i - \Delta)}{2\Delta}$$

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i + \Delta) - 2f(x_i) + f(x_i - \Delta))}{\Delta^2}$$

## Metode interpolative derivative, fol. derivata II-a

- **Metoda secantei**

Pp. punctul de inceput  $A$ , se alege un alt punct de referinta  $B$  suficient de departat de  $A$ . Astfel, putem scrie dezvoltarea in serie Taylor pt.  $f'$  din care se det. solutia de optim:

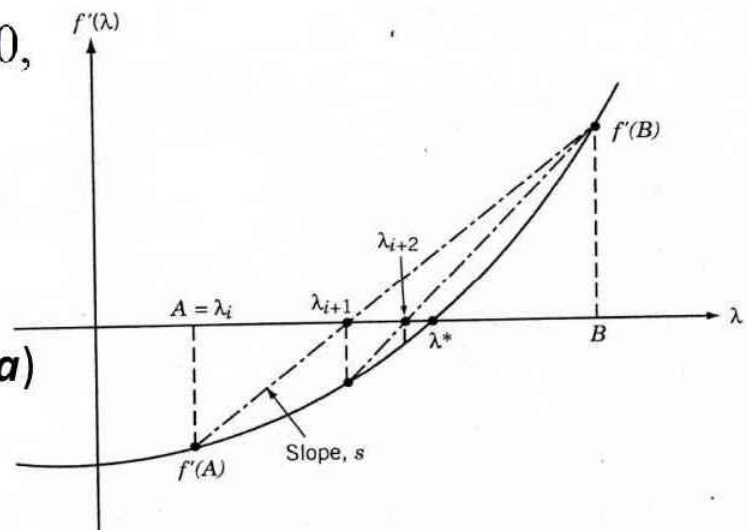
$$f'(x) = f'(x_i) + s(x - x_i) = 0,$$

unde derivata II-a este:

$$s = \frac{f'(B) - f'(x_i)}{B - x_i}$$

Rezulta solutia  $x = \dots$  (**tema**)

Se reia recursiv.



## Metode interpolative derivative, fol. derivata II-a

- **Metoda falsei pozitii**

Se foloseste pct anterior  $x_{k-1}$  pentru estimarea derivatei a doua

$$q(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \frac{1}{2} \frac{f'(x_{k-1}) - f'(x_k)}{x_{k-1} - x_k} (x - x_k)^2$$

Astfel solutia este:

$$q'(x_{k+1}) = 0 \Rightarrow x_{k+1} = x_k - f'(x_k) \frac{x_{k-1} - x_k}{f'(x_{k-1}) - f'(x_k)};$$